

ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «Введение в проективную геометрию»

Номинация: пропедевтика вузовских спецдисциплин

Автор программы:

Щербатенко Галина Валерьевна,
учитель математики Муниципального бюджетного
общеобразовательного учреждения
средняя общеобразовательная школа
«Самарская Вальдорфская школа»
городского округа Самара

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К ПРОГРАММЕ

Элективный курс представляет собой *пропедевтику вузовской спецдисциплины «Проективная геометрия»*.

Цель – подготовить учащихся к изучению дисциплины «Проективная геометрия». Элективный курс предназначен для освоения учащимися, планирующими получение высшего образования по инженерным специальностям.

Планируемые образовательные результаты

В результате изучения данного курса учащиеся должны:

- перечисляет основные понятия проективного пространства, называть двойственные элементы на плоскости и в пространстве;
- распознает двойственные многогранники;
- объясняет различные аксиоматики: Евклидовой, проективной и сферической геометрий;
- доказывает теорему Дезарга;
- строит сечения куба, призмы, пирамиды, используя ортогональную и параллельную проекции, внутреннее проектирование;
- строит центральные проекции с одной произвольной плоскости на другую произвольную плоскость и перспективы, конфигурации Дезарга при перенесении центра проектирования в произвольную точку конфигурации, гармоническое деление отрезка, преобразование инверсии;
- строит сечения, проективные и перспективные изображения, деление отрезка, инверсию, двойственные многогранники; случаи конфигурации Дезарга в том числе с использованием программы «Дезаргова фигура».ggb;
- выполняет моделирование плоскостных и пространственных объектов на основе изученных закономерностей.

Оценка планируемых образовательных результатов

В процессе изучения курса у каждого ученика формируется портфель – папка с файлами, содержащая все выполненные чертежи на формате А4. Критерии оценивания работ, входящих в портфолио, представлены в таблице 1.

Все работы могут предъявляться для оценивания повторно, если учитель обнаруживает в выполненной работе ошибки и недочеты.

Таблица 1

Критерии оценивания работ учащихся

| <i>тип работы</i> | <i>критерии оценивания</i> |
|---|---|
| построение сечений, деление отрезка, инверсия | точность и корректность построений, грамотность описания процедуры построения |

| | |
|---|---|
| | ния |
| творческие работы на проектирование и перспективу | точность и корректность построений, степень сложности в случае самостоятельного выбранного объекта проектирования |
| построение сечений многогранников | корректность чертежа, грамотность описания процедуры построения |

Все работы деятельности оцениваются по пятибалльной шкале. При контроле навыков геометрических построений используются листы – шаблоны: чертежи с заданными исходными начальными условиями.

В конце курса учащиеся получают зачетную контрольную работу. Образцы оценочных материалов для зачета см. в Приложении 1.

Итоговая оценка за освоение элективного курса является среднеарифметической оценок за портфолио и за результаты выполнения контрольной работы. Результаты оценки позволяют судить о степени сформированности навыков выполнения построений проективной геометрии.

Организация освоения содержания

Основаниями для отбора элементов содержания курса «Введение в проективную геометрию» являются следующие соображения:

1. Методы проективной геометрии являются по преимуществу синтетическими. Соприкасаясь с этой областью, учащиеся приобретают навыки проведения чисто геометрических рассуждений и доказательств. Это обстоятельство не следует недооценивать прежде всего ввиду перегруженности традиционной программы аналитическими методами (координаты, векторы, общая нацеленность на решение вычислительных задач).
2. Настоящий курс имеет прикладное значение. Учащиеся знакомятся с развитием идей проективной геометрии в эпоху Возрождения в связи с решением задач реалистического изображения трехмерных объектов (живопись, перспектива, архитектура).
3. Введение в проективную геометрию открывает такие отношения и связи, которые не могут быть даны простым чувственным восприятием. Названное расширение мыслительного мира достигается в процессе упражнения, прежде всего с помощью геометрических построений и вдумчивого рассмотрения чертежей.

Как следствие, программа курса предполагает значительную практическую составляющую, связанную в частности с освоением навыков выполнения сечений, центральных проекций и построением перспективных изображений.

Особенностью рассмотрения тем «сечения многогранников», «конфигурация Дезарга», «метаморфозы многогранников» в настоящем курсе, в отличие от традиционного, является использование «динамического» подхода построения семейств сечений, рассмотрение метаморфоз при непрерывном изменении различных параметров геометрических конструкций, что позволяет выявлять закономерности.

Проективная геометрия, обладая очень простой и ясной системой аксиом, является прекрасным полигоном для отработки аксиоматического подхода к геометрии вообще и для сравнения различных аксиоматик. В этом отношении предлагаемый курс оказывается хорошим введением в современную геометрию.

Требования к ресурсам

Специальных *организационных* ресурсов для реализации курса не требуется. Занятия проходят в классной комнате в соответствии с расписанием.

Обучение проходит с использованием *дидактического* ресурса – программы «Дезаргова фигура.ggb». Поурочное планирование представлено в Приложении 2.

Для реализации курса необходимы следующие материально-технические ресурсы:

1. Набор чертежных инструментов.
2. Папки с файлами на каждого учащегося.
3. Проектор с экраном.
4. Ноутбуки по количеству учащихся.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тема 1. Введение

Предмет проективной геометрии. Идеи эпохи Возрождения в области изображений пространственных объектов.

Развитие идей проективной геометрии.

Тема 2. Сечения многогранников

Сечения куба. Серединные и диагональные сечения. Свойства сечений. Семейства сечений. Построение сечений многогранников с опорой на ортогональную и параллельную проекции. Метод внутреннего проектирования. Построение сечений призм, пирамид.

Практическая деятельность

Исследуют свойства сечений.

Распознают линии пересечения плоскостей при одновременном сечении многогранника несколькими плоскостями.

Решают задачи на построение сечений многогранников, принадлежность точек плоскости сечениям.

Строят все срединные и диагональные сечения куба на одном чертеже.

Выполняют упражнение «пила-волчок», исследуя метаморфозу сечений куба.

Строят все сечения куба – правильные шестиугольники – на одном чертеже.

Строят сечения параллелепипеда с опорой на ортогональную и параллельную проекции.

Строят сечения многогранников методом следов, методом внутреннего проектирования.

Тема 3. Центральное проектирование, центральная перспектива

Приемы построения проекций и их свойства. Растущие треугольники. Прямая как целое. Конические сечения как центральные проекции окружности. Плоскость и пространство как целое. Центральная перспектива. Сгорающая свеча – центрально – линейная коллинеация. Центральное-линейное соответствие. Конфигурация Дезарга. Теорема Дезарга. Движения, как специальные случаи перспективной коллинеации.

Практическая деятельность

Разрабатывают приемы построения проекций.

Исследуют свойства проекций.

Находят связь между понятиями бесконечно удаленной точки и точки схода, бесконечно удаленной прямой и горизонтом.

Формулируют теорему Дезарга как результат исследования конфигурации Дезарга и ее трансформаций.

Обобщают свои представления о движениях плоскости (гомотетия, сдвиг, поворот, параллельный перенос, осевая симметрия), рассматривая их как частные случаи центрального линейного преобразования.

Консультируют друг друга и получают консультации учителя по вопросам проектирования и перспективы.

Выполняют построения центральной проекции.

Выполняют упражнение «Растущие треугольники».

Выполняют упражнение по проектированию треугольников из вертикальной в горизонтальную плоскость с получением пучков параллельных прямых.

Строят центральную перспективу.

Выполняют упражнение «Шахматная доска».

Строят в вертикальной плоскости центральную проекцию параллелепипеда.

Строят случай центрально линейной коллинеации «Сгорающая свеча».

Строят перспективную коллинеацию «Драконовы хвосты».

Чертят процесс коллинеации, рассматривая только происходящее на плоскости.

Строят перспективную коллинеацию на плоскости, выбрав в качестве инициатора преобразования одну из вершин исходного четырехугольника (шестиугольника).

Строят конфигурации Дезарга, в том числе с использованием программы Дезаргова фигура.ggb.

Строят конфигурации Дезарга (получает трехвершинники и трехсторонники) для случая двух исходных равносторонних треугольников, когда один вращается относительно общего центра.

Тема 4. Двойственность на плоскости и в пространстве

Деление плоскости. Множества точек и области прямых – ядра и оболочки. Деление отрезка. Гармоническое деление отрезка. Инверсия. Аксиоматический подход. Сравнение аксиоматики Евклидовой, проективной и сферической геометрий. Двойственность в Евклидовой и проективной геометрии. Двойственность на плоскости и в пространстве. Двойственность Платоновых тел. Метаморфоза куба в октаэдр. Полярные многогранники.

Практическая деятельность

Изображают случаи деления плоскости точками, прямыми.

Выполняют построения деления отрезка, гармонического деления отрезка, преобразования плоскости – инверсию.

Строят поэтапные метаморфозы тетраэдра при переходе вершин через бесконечность.

Изображают поэтапную метаморфозу куба в октаэдр.

Строят двойственные тела для ряда тел, когда исходным рядом является куб, и его высота постепенно уменьшается до нуля.

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

| № | Тема | КОЛ-ВО ЧАСОВ | | | |
|-------|---|--------------|-------------|-------------------------|-------------------|
| | | всего | аудитор-ных | из них на практ. де-ят. | на самост. работу |
| 1 | Введение | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | Сечения многогранников | 9 | 9 | 5 | 0 |
| 3 | Центральное проектирование, центральная перспектива | 14 | 14 | 9 | 0 |
| 4 | Двойственность на плоскости и в пространстве | 10 | 10 | 5 | 0 |
| ИТОГО | | 34 | 34 | 19 | 0 |

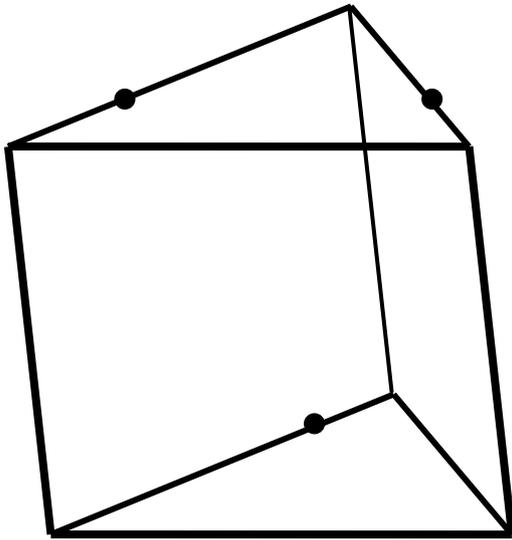
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернхард А. Проективная геометрия. – М.: Парсифаль, 2005.
2. Варден Ван дер Б.Л. Пробуждающая наука. – М., 1959.
3. Глэклер Г. Проективная геометрия как путь к целостному пониманию пространства. – М., 1996.
4. Иванченко И.А. Методическая разработка курса по выбору по теме «Элементы проективной геометрии в решении задач на построение» [Электронный документ]. – Режим доступа – gim-kekina.edu.yar.ru/.../ivanchenko/metodicheskaya_gazrabotka.doc (Дата обращения 10.10.2015).
5. Иванченко И.А. Элементы проективной геометрии в решении задач на построение. – Ростов: гимназия им. А.Л.Кегина, 2009.
6. Кирсанов А.А. Лекции по проективной геометрии [Электронный документ]. – Режим доступа – <http://pskgu.ru/ebooks/geoproekt.html> (Дата обращения 10.10.2015).
7. НОУ ИНТУИТ. Введение в проективную геометрию для школьников [Электронный документ]. – Режим доступа – <http://www.intuit.ru/studies/courses/1027/307/info> (Дата обращения 10.10.2015).
8. Построение сечений [Электронный документ]. – Режим доступа – wiki.iteach.ru/images/0/0c/Построение_сечений.doc (Дата обращения 10.10.2015).
9. Проективная геометрия [Электронный документ]. – Режим доступа – <http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/96950221-9b34-c6a7-6484-c3d66cec8d6c/1001556A.htm> (Дата обращения 10.10.2015).
10. Юнг Дж.В. Проективная геометрия, - М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949.

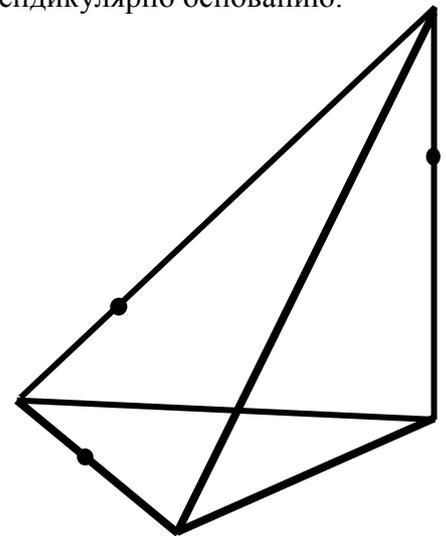
ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
(пример заданий контрольной работы на построение сечений многогранников)

Построить сечение тел по трем точкам.

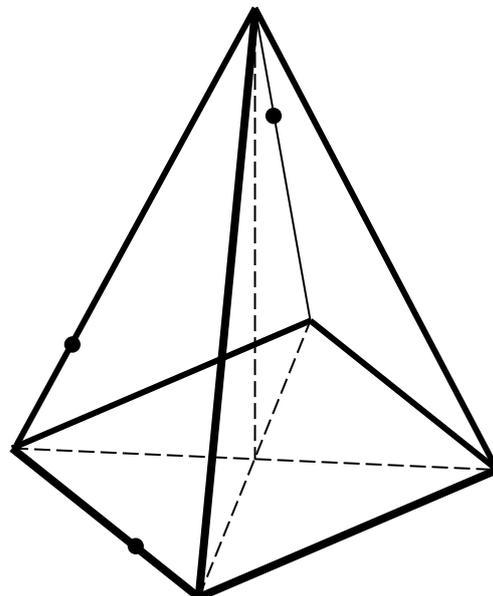
А. Призма с параллельными основаниями.



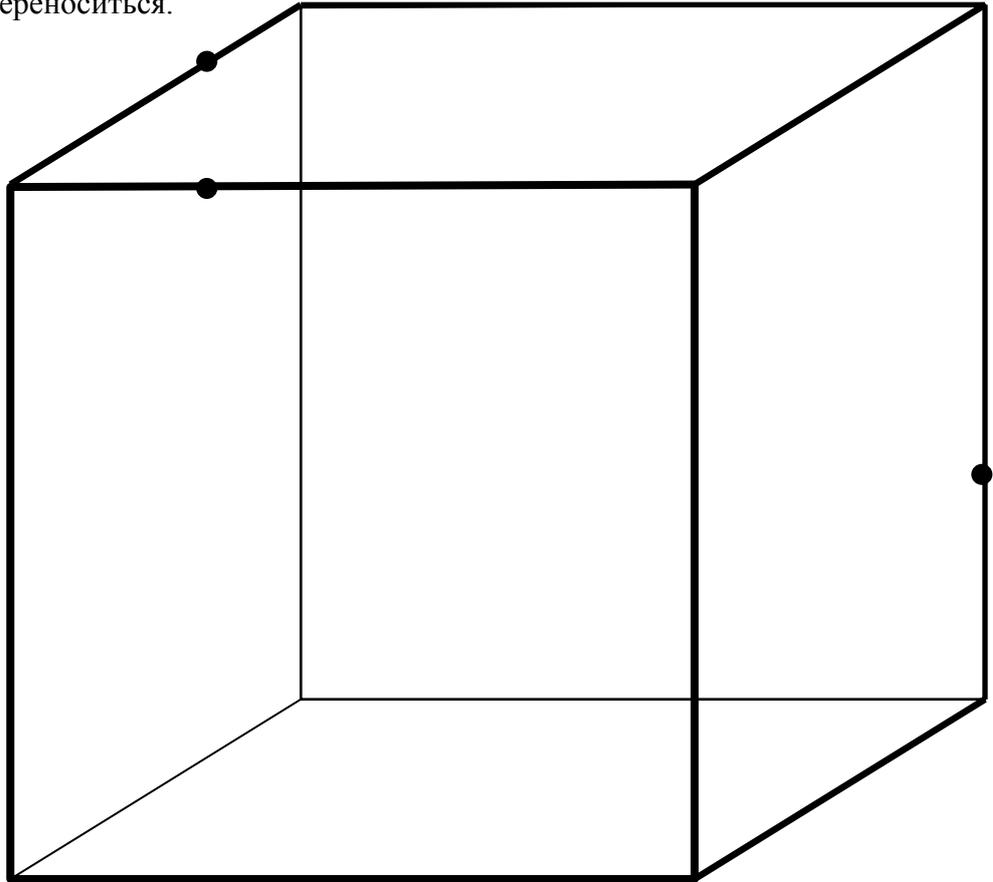
Б. Пирамида, одно из ребер которой перпендикулярно основанию.



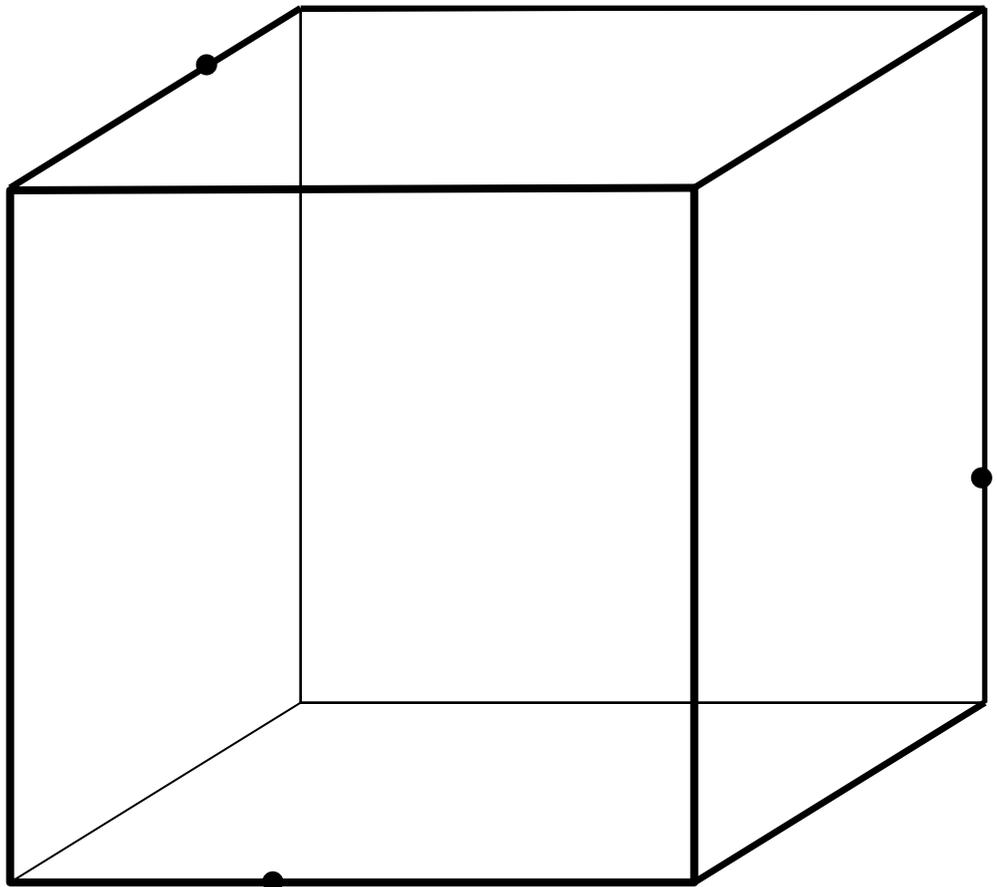
В. Пирамида, в основании которой квадрат, а вершина проецируется на пересечение его диагоналей.



Построить сечение по трем точкам. Исследовать, как оно меняется, если плоскость будет параллельно переноситься.



Построить сечение куба по трем точкам. Описать ход построения.



КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ

«Двойственность на плоскости и в пространстве»

1. Назвать области (если есть) при делении плоскости одной, двумя, тремя прямыми; одной, двумя, тремя граничными точками.
2. На какие области делится точечное поле с помощью:
 - двух прямых;
 - двух параллельных прямых;
 - прямой в бесконечности и еще одной прямой;
 - трех прямых, две из которых параллельны;
 - прямой в бесконечности и еще двух прямых;
 - четырех прямых, образующих параллелограмм;
 - четырех прямых, образующих трапецию;
 - прямой в бесконечности и еще трех прямых;
3. Назвать и описать множества в пространстве точек, пространстве прямых, пространстве плоскостей.
4. Установить соответствие (двойственность):

| | |
|---------------|-------------------|
| Поле точек | Пучок плоскостей |
| Связка прямых | Поле прямых |
| Ряд точек | Пучок прямых |
| Пучок прямых | Связка плоскостей |
5. Что понимается под гармоническим делением отрезка?
6. Какое соответствие между внутренним и внешним пространством устанавливает инверсия?
7. Назвать пары двойственных правильных многогранников.
8. Что происходит с вершинами и ребрами многогранника при его метаморфозе в двойственный ему? Привести пример.

ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

| <i>№ n/n</i> | <i>Раздел, тема урока</i> | <i>Количество часов</i> |
|------------------|---|-----------------------------|
| 1. | <i>Введение</i> | 1 |
| | Задачи проективной геометрии. Идеи эпохи Возрождения в области изображений пространственных объектов | 1 |
| 2. | <i>Сечения многогранников</i> | 9 |
| | Плоские сечения куба. Построение срединных и диагональных сечений куба. | 1 |
| | Построение всех срединных и диагональных сечений куба на одном чертеже. | 1 |
| | Свойства сечений. Семейства сечений. Подвижные представления – пила-волчок. | 1 |
| | Построение всех сечений куба – правильных шестиугольников. | 1 |
| | Приемы построения сечений с опорой на ортогональную и параллельную проекции. Метод следов. | 1 |
| | Сечения призм, пирамид, построение. | 1 |
| | Решение задач на принадлежность точек плоскости сечениям | 1 |
| | Построение сечений. Метод внутреннего проектирования. | 1 |
| | Контрольная работа «Построение сечений многогранников» | 1 |
| 3. | <i>Центральное проецирование, центральная перспектива.</i> | 14 |
| | Центральное проектирование. Приемы построения проекций и их свойства. | 1 |
| | Растущие треугольники. От конечного к бесконечному – прямая как целое. | 2 |
| | Конические сечения – центральные проекции окружности. | 1 |
| | Плоскость и пространство как целое | 1 |
| | Центральная перспектива. Связь между понятиями бесконечно удаленной точки и точки схода, бесконечно удаленной прямой и горизонтом | 1 |
| | Сгорающая свеча – центрально – линейная коллинеация. | 1 |
| | Центрально-линейное соответствие. Конфигурация Дезарга. | 1 |
| | Исследование конфигураций Дезарга. | 1 |
| | Построение проекции треугольника при перенесении центра проектирования в произвольную точку конфигурации. | 1 |
| | Теорема Дезарга. | 1 |
| | Специальные случаи перспективной коллинеации. Случаи центрально линейного преобразования. (гомотетия, смещение, поворот, параллельный перенос, осевая симметрия). | 2 |
| | Консультация по построениям. Сдача чертежей. | 1 |
| 4. | <i>Двойственность в пространстве</i> | 10 |
| | Деление плоскости. Множества точек и области прямых – ядра и оболочки. | 1 |
| | Деление отрезка. Гармоническое деление отрезка | 1 |
| | Инверсия | 1 |

| | | |
|--|--|-----------|
| | Двойственность в Евклидовой и проективной геометрии. Двойственность точки и прямой. | 1 |
| | Двойственность в пространстве. | 1 |
| | Аксиоматический подход. Сравнение Аксиомы и основные понятия Евклидовой, проективной и сферической геометрий | 1 |
| | Двойственность Платоновых тел. | 1 |
| | Метаморфоза куба в октаэдр. | 1 |
| | Преобразования полярных многогранников. | 1 |
| | Зачет | 1 |
| | <i>Итого:</i> | <i>34</i> |